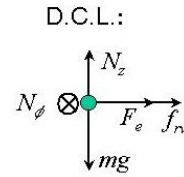


Solución Pregunta 3:

Las fuerzas que actúan sobre la partícula se indican en el DCL, donde:

$$\vec{F}_e = -k(r - l_0) \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{f}_{rv} = -c \dot{r} \hat{r}$$



a) Tipos de solución para el largo del resorte

Si utilizamos coordenadas polares con origen en el extremo del resorte que está en el eje vertical, el largo del resorte queda descrito por la variable r .

La ecuación del movimiento en estas coordenadas, en la dirección radial es:

según \hat{r} : $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -c\dot{r} - k(r - l_0)$

donde: $\dot{\phi} = cte = \omega_0$ y $k = 2m\omega_0^2$

Reemplazando y reordenando se llega a la EDO siguiente: $\ddot{r} + \frac{c}{m}\dot{r} + \omega_0^2 r = 2\omega_0^2 l_0$

cuya solución general es: $r(t) = \underbrace{A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}}_{r_h = \text{homogénea}} + \underbrace{2l_0}_{r_p = \text{particular}}$

donde: $s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$ (1)

Los tipos de solución para $r(t)$ dependen del término sub-radical de (1).

Recordando que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$, se distinguen tres casos:

i) $\frac{c}{2m} > \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son reales, distintas y negativas.

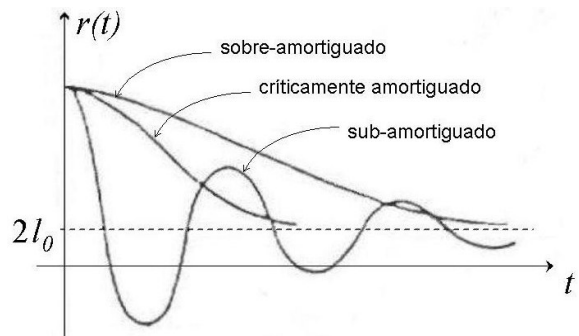
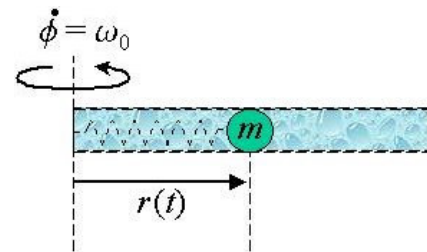
la solución tiene la forma: $r(t) = A_1 e^{s_1 t} + B_1 e^{s_2 t} + 2l_0$
 \Rightarrow movimiento sobre-amortiguado
 (el amortiguamiento prevalece sobre la elasticidad)

ii) $\frac{c}{2m} = \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son reales, iguales y negativas

la solución tiene la forma: $r(t) = (A_2 + B_2 t) e^{s t} + 2l_0$
 \Rightarrow amortiguamiento crítico
 (el amortiguamiento se compensa con la elasticidad)

iii) $\frac{c}{2m} < \omega_0 \Rightarrow s_1, s_2$ son complejas conjugadas

la solución tiene la forma: $r(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} [A_3 \cos \Omega t + B_3 \sin \Omega t] + 2l_0$, con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$
 \Rightarrow movimiento subamortiguado (la elasticidad prevalece sobre el amortiguamiento)



b) Posición y velocidad de P c/r a sistema inercial

Usando el sistema de coordenadas polares definido en (a), la posición y velocidad de P , en función del tiempo, tienen la siguiente expresión:

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r} \quad (2.1).$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{r} + r(t) \dot{\phi}(t) \hat{\phi} \quad (2.2).$$

En este caso $\omega_0 = \frac{c}{m} > \frac{c}{2m} \Rightarrow$ la solución es del tipo: $r(t) = e^{-\frac{c}{m}t} \left[A_3 \cos \Omega t + B_3 \sin \Omega t \right] + 2 l_0$

$$\text{donde: } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m} \right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{3} \frac{c}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0$$

Condiciones iniciales:

$$r(t=0) = l_0 \Rightarrow A_3 + 2l_0 = l_0 \Rightarrow A_3 = -l_0$$

$$\dot{r}(t=0) = 0 \Rightarrow -\frac{c}{m} A_3 + B_3 \Omega = 0 \Rightarrow B_3 = -\frac{c}{m\Omega} l_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} l_0$$

$$\text{Entonces: } r(t) = l_0 \left[2 - e^{-\omega_0 t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t \right] \right] \quad (3.1)$$

$$\dot{r}(t) = l_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t} \left[2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t \right] \quad (3.2)$$

Reemplazando (3.1) en (2.1) obtenemos el vector posición en función del tiempo.

Reemplazando (3.1) y (3.2) en (2.2) y recordando que $\dot{\phi} = \omega_0$, obtenemos la velocidad en función del tiempo.